BOEKVOORSTELLING:
SOHO WISKUNDE PLANTYN LINEAIRE ALGEBRA I EN II

AUTEURS: KOEN DE NAEGHEL EN LUC VAN DEN BROECK
REDACTIE: PEDRO TYTGAT EN BERT SEGHERS

SOHO Wiskunde Plantyn is een boekenreeks bedoeld om leerlingen te laten kennismaken met wiskunde op academisch niveau. Na *Groepentheorie* [1] is er nu ook *Lineaire algebra I* [2] en *Lineaire algebra II* [3].

Elk boekje in de reeks SOHO #Wiskunde Plantyn behandelt een wiskundig onderwerp dat aansluit bij de vooropleiding van een leerling uit het secundair onderwijs (SO) in een wiskundig sterke richting en in de stijl van wiskundecursussen in het hoger onderwijs (HO). Naast het aanreiken van wiskundige kennis, wil elk boekje vooral een kennismaking bieden met academische wiskunde. Dat maakt de overgang naar het hoger onderwijs minder zwaar. De samenwerking tussen academische wiskundigen en leerkrachten zorgt voor kant-en-klare teksten, die in de klas of voor zelfstudie kunnen gebruikt worden. Sommige boekjes vertrekken vanuit toepassingen, sommige vanuit de axiomas, maar steeds wordt de theorie nauwgezet opgebouwd, met aandacht voor exactheid en bewijstechniek.

Lineaire algebra maakt deel uit van de basiscursussen wiskunde in zowat alle wetenschappelijke studies van het hoger onderwijs: wiskunde, fysica, chemie, informatica, economische wetenschappen, alle ingenieursrichtingen etc. Een didactisch doordachte kennismaking met deze leerstof in de derde graad van het secundair onderwijs vormt daarom een bijzonder nuttige voorbereiding op verdere wetenschappelijke studies.

Maar de doelstelling is breder: de boekjes *Lineaire algebra I en II* laten de lezer ook kennismaken met een axiomatische en dus abstracte opbouw van een wiskundige theorie, zoals dit in het academisch hoger onderwijs de standaard is. Het instapniveau is aangepast aan de voorkennis van leerlingen van een derde graad secundair onderwijs en de abstracte theorie wordt op een heldere manier opgebouwd, ondersteund door talrijke voorbeelden en een brede waaier aan concrete en theoretische opdrachten.

In *Lineaire algebra I* definiëren we de vectorruimte en allerlei verwante begrippen zoals lineair afhankelijke en onafhankelijke vectoren, deelruimte, basis en dimensie en bewerkingen met deelruimten. Het eerste deel eindigt met enkele toepassingen. Daarmee willen we laten zien dat de studie van een abstracte structuur kan leiden tot een antwoord op concrete probleemstellingen.

In *Lineaire algebra II* vormen toepassingen het uitgangspunt. Het beschrijven van evolutieprocessen leidt tot enkele belangrijke vragen in verband met eigenvectoren, machten van matrices en hun convergentie. In de centrale hoofdstukken worden de nodige wiskundige begrippen en stellingen algemeen en rigoureus aangebracht en worden de vragen uit het eerste hoofdstuk beantwoord. Een korte studie van stochastische matrices brengt de lezer in het laatste hoofdstuk terug bij enkele toepassingen, die nu op een wiskundig gefundeerde en efficiënte manier aangepakt kunnen worden. Indien de begrippen lineaire (on)afhankelijkheid, basis en dimensie in een andere cursus werden aangeleerd, dan is het niet noodzakelijk om *Lineaire algebra I* door te nemen en kan kan meteen met *Lineaire algebra II* begonnen worden.

Als smaakmaker geven we hieronder een voorbeeld uit een van de laatste pagina's van *Lineaire algebra I.*

Probleemstelling In de rij van Fibonacci $(f_n) = 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots$ is elke term gelijk aan de som van de twee voorgaande termen. Een recursief voorschrift van deze rij wordt dus gegeven door

$$(f_n) = \begin{cases} 1 & \text{als } n = 1, 2 \\ f_{n-1} + f_{n-2} & \text{als } n > 2. \end{cases}$$

Om met dit recursief voorschrift bijvoorbeeld de 100e term te bepalen, moeten we eerst de 99e en de 98e term kennen. Daartoe moeten we eerst de 96e en de 97e term bepalen, etc. Dat zou veel efficiënter kunnen, mochten we een expliciet voorschrift kennen: een formule waarmee we meteen de n-de term van de rij van Fibonacci kunnen bepalen, zonder eerst de $n-1$ voorgaande termen te moeten berekenen.

Dit bekend probleem wordt meestal aangepakt met behulp van het zogenaamd *diagonaliseren van matrices*, een onderwerp dat in *Lineaire algebra II* aan bod komt. Maar het kan ook door enkel op de theorie van *Lineaire algebra I* te steunen. Hieronder laten we zien hoe dat werkt.

Oplossing Beschouw de vectorruimte $\mathbb{R}, \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, +$ van alle reële rijen. Noem W de deelverzameling van alle reële rijen (a_n) die voldoen aan de recursierelatie $a_{n+2} = a_n + a_{n+1}$ voor elke $n \in \mathbb{N}$. Door het scheiden van de parameters vinden we dat

$$\begin{aligned} W &= \{(r, s, r+s, r+2s, 2r+3s, 3r+5s, 5r+8s, 8r+13s, \ldots) \mid r, s \in \mathbb{R}\} \\ &= \operatorname{Span}\{(1,0,1,1,2,3,5,8,\ldots), (0,1,1,2,3,5,8,13,\ldots)\} \end{aligned}$$

waarmee aangetoond is dat W een deelruimte van $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ is. Bovendien zijn de twee voortbrengers $(1,0,1,1,2,3,\ldots)$ en $(0,1,1,2,3,5,\ldots)$ lineair onafhankelijk, zodat $\dim W = 2$.

De deelruimte W bevat de rij van Fibonacci $(f_n) = (0,1,1,2,3,5,\ldots)$. Nu gaan we op zoek naar een andere basis van W, meer bepaald een geordende basis $\mathcal{B}$ die bestaat uit twee meetkundige rijen. De reden waarom we dat doen is omdat elke meetkundige rij (a_n) een eenvoudig expliciet voorschrift heeft: $a_n = a_0 q^n$ voor een zekere $q \in \mathbb{R}$. Op die manier zullen de coördinaten van (f_n) ten opzichte van $\mathcal{B}$ toelaten een expliciet voorschrift van de rij van Fibonacci te geven.

Beschouw nu een meetkundige rij $(a_n) = (a_0, a_0 q, a_0 q^2, \ldots)$. Dan is

$$\begin{aligned} (a_n) \in W \quad &\Leftrightarrow \quad a_0 q^{n+2} = a_0 q^n + a_0 q^{n+1} \text{ voor elke } n \in \mathbb{N} \\ &\Leftrightarrow \quad a_0 = 0 \text{ of } q^2 = 1 + q. \end{aligned}$$

De keuze $a_0 = 0$ levert de nulrij op. De andere meetkundige rijen van W hebben als quotiënt q de oplossingen van $x^2 = 1 + x$. De oplossingen van deze vergelijking zijn $\varphi = (1+\sqrt{5})/2$ (het getal van de gulden snede) en $1 - \varphi = (1-\sqrt{5})/2$. De meetkundige rijen $(u_n) = (1, \varphi, \varphi^2, \ldots)$ en $(v_n) = (1, 1-\varphi, (1-\varphi)^2, \ldots)$ zijn lineair onafhankelijk (ga na) en omdat $\dim W = 2$ is $\mathcal{B} = ((u_n), (v_n))$ een geordende basis van W.

Ten slotte bepalen we de coördinaten van (f_n) ten opzichte van $\mathcal{B}$. Kortom, we zoeken $r, s \in \mathbb{R}$ waarvoor $(f_n) = r(u_n) + s(v_n)$, dus $(0,1,1,2,3,5,8,\ldots) = r(1, \varphi, \varphi^2, \ldots) + s(1, 1-\varphi, (1-\varphi)^2, \ldots)$. Vergelijken we de eerste termen dan vinden we $r = -s = 1/\sqrt{5}$. Hieruit volgt een directe formule voor de n-de term van de recursief gedefinieerde rij van Fibonacci:

$$f_n = \frac{\varphi^n - (1-\varphi)^n}{\sqrt{5}} \quad \text{met } \varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Deze formule wordt toegeschreven aan Jacques Binet die ze in 1843 vond, doch het resultaat werd eerder gevonden door Abraham de Moivre in 1730 en Leonhard Euler in 1765.

Deze werkwijze kan ook toegepast worden op andere rijen. Zo is het expliciet voorschrift van een meetkundige rij welbekend, maar wat is bijvoobeeld het expliciet voorschrift van een rij (c_n) die de volgende twee meetkundige rijen $(a_n) = 1, 3, 9, 27, 81, \ldots$ en $(b_n) = 5, 15, 45, 135, 405, \ldots$ als deelrij heeft?

Oefening Bepaal een expliciet voorschrift van de rij

$$(c_n) = \begin{cases} 1 & \text{als } n = 1 \\ 5 & \text{als } n = 2 \\ 3b_{n-2} & \text{als } n > 2. \end{cases}$$

Referenties

[1] T. Kuijpers, C. Lybaert. *SOHO Wiskunde Plantyn, Groepentheorie*. Plantyn, Mechelen, 2013.
[2] K. De Naeghel, L. Van den Broeck. *SOHO Wiskunde Plantyn, Lineaire algebra I*. Plantyn, Mechelen, 2014.
[3] L. Van den Broeck, K. De Naeghel. *SOHO Wiskunde Plantyn, Lineaire algebra II*. Plantyn, Mechelen, 2014.

E-mail address, K. De Naeghel, Luc Van den Broeck, Pedro Tytgat en Bert Seghers:
koendenaeghel@hotmail.com, vandenbroeck_luc@telenet.be, pedro@pedrotytgat.be, bertseghers@gmail.com